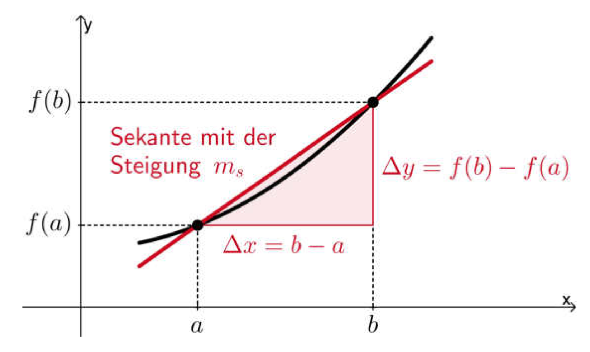
Differentialrechnung

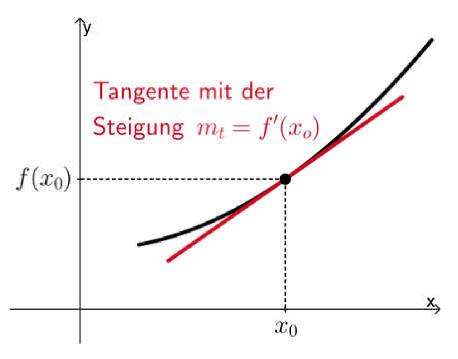
Differenzenquotient

- $m_S = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- **Steigung einer Sekante** durch zwei Graphenpunkte $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$
- **Mittlere Änderungsrate** einer Funktion im Intervall $[a; b]$



Differentialquotient

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- **Formale Definition der Ableitung** einer Funktion
- **Steigung derTangente** an den Graphen einer Funktion an einer Stelle x_0
- **Steigung des Graphen** einer Funktion an einer Stelle x_0
- **Lokale Änderungrate** einer Funktion an einer Stelle x_0
- Im Sachzusammenhang: **Momentane Änderungsrate** einer Größe zu einem Zeitpunkt *t*



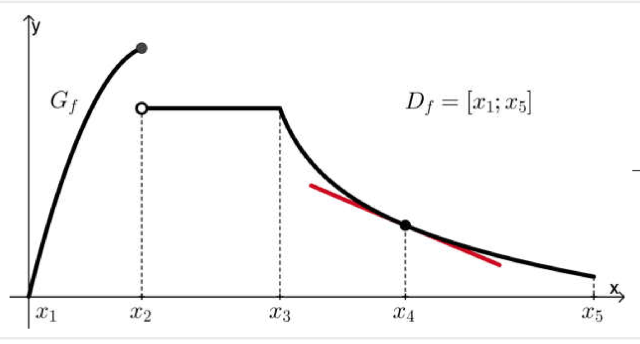
Ableitungen / Ableitungsregeln

	Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Sinusfunktion	$\sin x$	$\cos x$
Kosinusfunktion	$\cos x$	$-\sin x$
Natürliche Exponentialfunktion	e^x	e^x
Exponentialfunktion	a^x	$a^x \cdot \ln a$
Natürliche Logarithmusfunktion	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
Logarithmusfunktion	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

	Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
Summenregel	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$k \cdot u(x)$	$k \cdot u'(x)$
Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Differenzierbarkeit

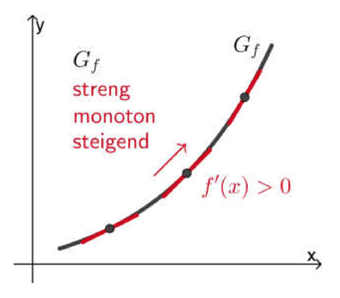
- Differenzierbar, wenn der Differentialquotient existiert, d. h. wenn der links- und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen.
  $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Nicht differenzierbar an einer „Knick"- oder Sprungstelle
- Nicht differenzierbar an den eingeschlossenen Rändern eines Definitionsbereichs

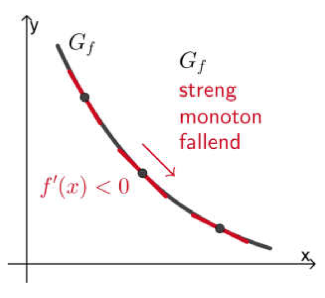


- Nicht differenzierbar am linken Definitionsrand $x = x_1$
- Nicht differenzierbar an der Sprungstelle $x = x_2$
- Nicht differenzierbar an der „Knickstelle" $x = x_3$
- Differenzierbar an der Stelle $x = x_4$
- Nicht differenzierbar am rechten Definitionsrand $x = x_5$

Monotonieverhalten

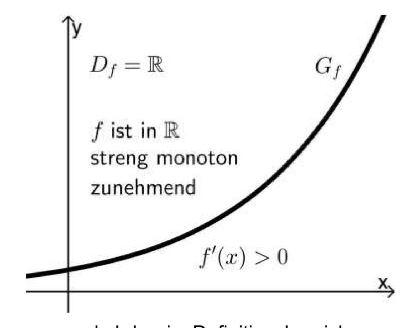
- Betrachtet wird eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion f.
- Die erste Ableitung beschreibt die Steigung des Graphen einer Funktion.
- **Monotoniekriterium**
  $f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ ist streng monoton zunehmend in I
  $f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ ist streng monoton abnehmend in I



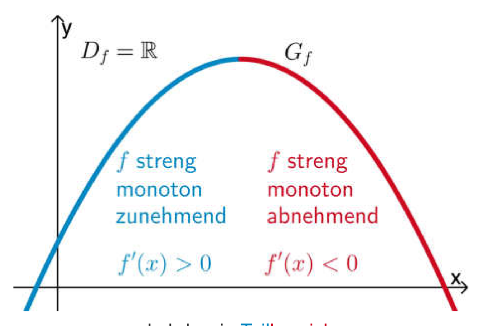


Umkehrbarkeit einer Funktion

- Die Umkehrbarkeit einer Funktion lässt sich mit dem **Monotoniekriterium** untersuchen.
- Eine Funktion heißt umkehrbar, falls es zu jedem Werte der Wertemenge genau einen Wert der Definitionsmenge gibt.
- Ist eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich bzw. einem Teilbereich davon **streng monoton zunehmend oder streng monoton abnehmend**, ist sie dort **umkehrbar**.



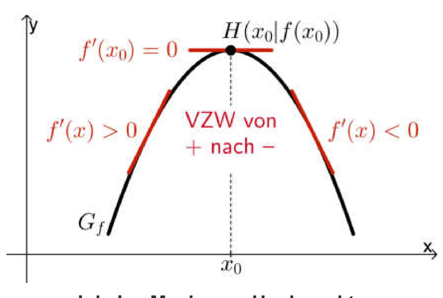
umkehrbar im Definitionsbereich



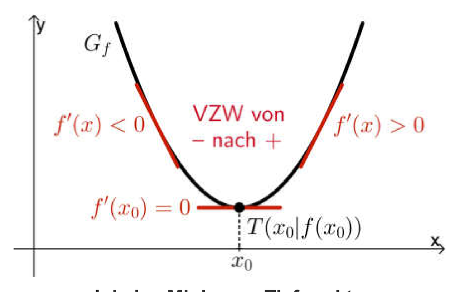
umkehrbar in Teilbereichen

Extremstellen, Extremwerte, Extrempunkte

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I ein- bzw. zweimal differenzierbare Funktion f.
- An einer Extremstelle hat eine Funktion ein **Maximum** oder ein **Minimum**.
- Eine Extremstelle einer Funktion ist eine **Nullstelle der ersten Ableitung** der Funktion.
- An einer Extremstelle hat der Funktionsgraph eine **waagrechte Tangente**.
- Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$
  - Vorzeichenwechsel (VZW) von f'

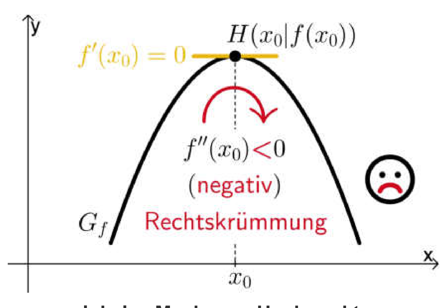


lokales Maximum, Hochpunkt

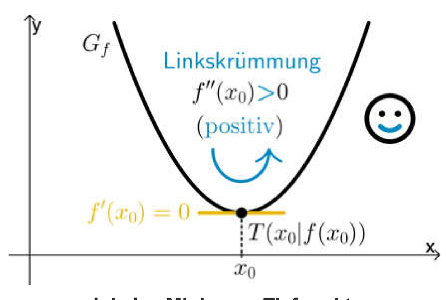


lokales Minimum, Tiefpunkt

  - Vorzeichen von f''



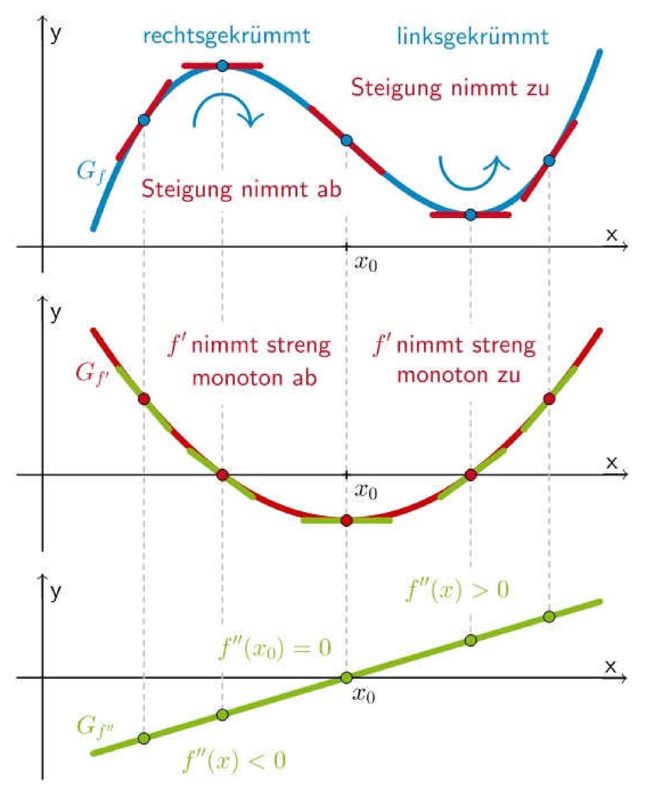
lokales Maximum, Hochpunkt



lokales Minimum, Tiefpunkt

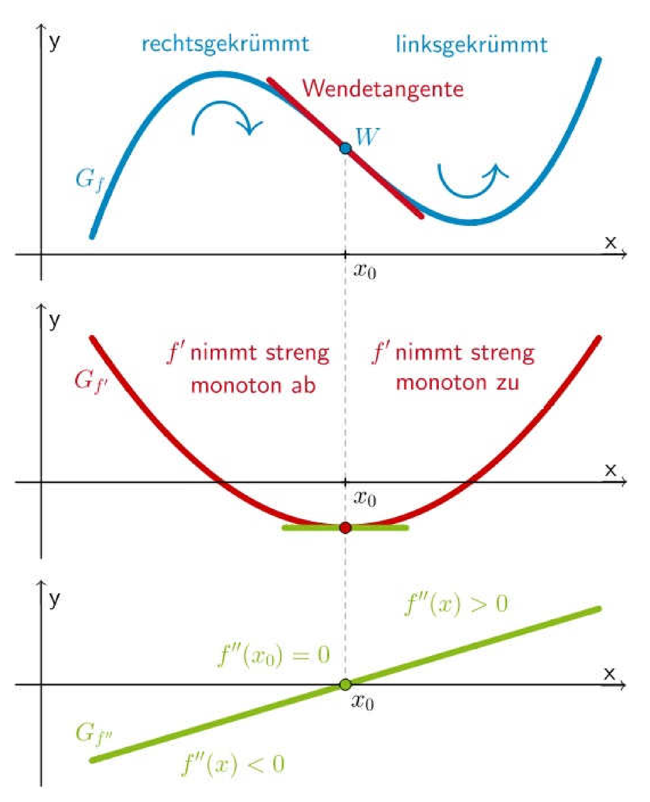
Krümmungsverhalten

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f.
- **rechtsgekrümmt**, Steigung des Graphen nimmt ab (1. Ableitung), Änderungsrate der Steigung (2. Ableitung) ist negativ
- **linksgekrümmt**, Steigung des Graphen nimmt zu (1. Ableitung), Änderungsrate der Steigung (2. Ableitung) ist positiv

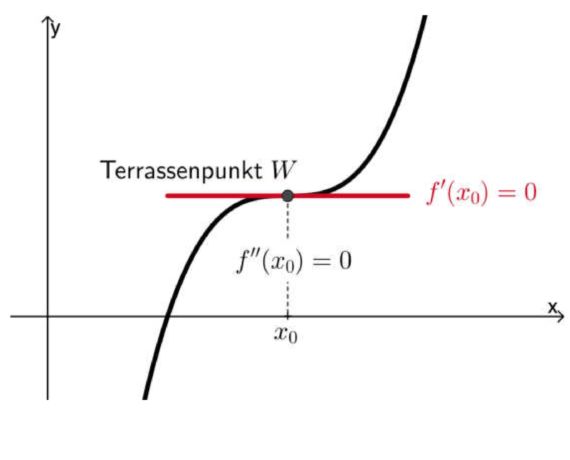


Wendestellen, Wendepunkte, Wendetangente

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f.
- An einer Wendestelle **ändert der Graph sein Krümmungverhalten**.
- Der zugehörige Graphenpunkt heißt **Wendepunkt** W.
- Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt Wendetangente.
- Im Wendepunkt ist die **Steigung** des Graphen einer Funktion **lokal extremal**.
- Eine Wendestelle einer Funktion ist eine **Extremstelle der ersten Ableitung** der Funktion und somit eine **Nullstelle der zweiten Ableitung** der Funktion.
- Notwendige Bedingung: $f''(x_0) = 0$
  - Vorzeichenwechsel (VZW) von f''

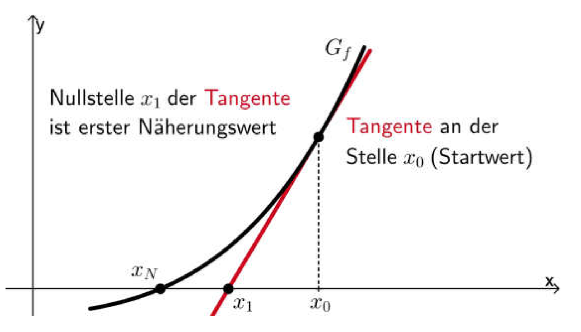


  - Mithilfe der dritten Ableitung f'''
    - $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist **Wendestelle**
    - $f'''(x_0) = 0:$ **keine Aussage** bezüglich Wendestelle **möglich**.
- Gilt an einer Wendestelle zusätzlich $f'(x_0) = 0:$
  - $W(x_0|f(x_0))$ ist **Terrassenpunkt**
  - waagrechte Wendetangente



Newton-Verfahren

- Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen
- Newton'sche Iterationsformel
  $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ n \in \mathbb{N}\ \ (f'(x_n) \neq 0)$$
- geeigneter Startwert x_0
  - liegt in der Umgebung der zu bestimmenden Nullstelle x_N
  - darf keine Extremstelle sein, da $f'(x_0) \neq 0$



Funktionsbestimmungen

- Die Aufgabenstellung nennt den **Ansatz für den** zu bestimmenden **Funktionsterm**, z.B. „ganzrationale Funktion vom Grad 3".
- Die Aufgabenstellung nennt **Eigenschaften des Funktionsgraphen** wie z.B. Graphenpunkte, Extrempunkte, Steigung des Graphen an einer Stelle usw.
- Aus den Eigenschaften lassen sich mithilfe des Funktionsansatzes und dessen Ableitung(en) **Gleichungen formulieren**.
- Die Gleichungen ergeben ein **zu lösendes Gleichungssystem**.

Eigenschaft(en)	Gleichung(en)		
Der Graph der Funktion f	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
• schneidet die x-Achse an der Stelle x_0 (Nullstelle).	$f(x_0) = 0$		
• berührt die x-Achse an der Stelle x_0.	$f(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	
• schneidet die y-Achse an der Stelle y_0.	$f(0) = y_0$		
• verläuft durch den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$	$f(x_0) = y_0$		
• hat einen Hochpunkt/Tiefpunkt an der Stelle x_0.		$f'(x_0) = 0$	
• hat an der Stelle x_0 die Steigung m.		$f'(x_0) = m$	
• hat einen Wendepunkt an der Stelle x_0.			$f''(x_0) = 0$
• hat an der Stelle x_0 die größte Steigung/das größte Gefälle.			$f''(x_0) = 0$
• hat den Wendepunkt $W(x_0 \mid y_0)$.	$f(x_0) = y_0$		$f''(x_0) = 0$
• hat den Terrassenpunkt $P(x_0 \mid y_0)$	$f(x_0) = y_0$	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$
• berührt den Graphen der Funktion g an der Stelle x_0.	$f(x_0) = g(x_0)$	$f'(x_0) = g'(x_0)$	
• Die Tangente im Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ hat die Steigung m.	$f(x_0) = y_0$	$f'(x_0) = m$	
• Die Tangente im Wendepunkt $W(x_0 \mid y_0)$ hat die Steigung m.	$f(x_0) = y_0$	$f'(x_0) = m$	$f''(x_0) = 0$