Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Aufgaben mit Lösungen

- Definition ④
- Darstellungsformen ⑥
- Nullstelle(n) ④
- Definitionslücke(n) ④
- Polstelle(n) ④
- Asymptoten ②
- Funktionsbestimmungen ②

Definition

- Gebrochenrational, wenn darstellbar als Quotient zweier Polynome : $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$
- Zählerpolynom $p(x) \neq 0$
- Nennerpolynom $q(x)$ mindestens vom Grad 1
- a_m, b_n heißen Leitkoeffizienten

Darstellungsformen

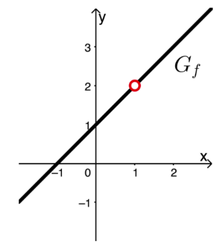
- $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \overset{\text{Polynomdivision}}{\Longleftrightarrow} g(x) + r(x)$ mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$
  - Gegeben in der Form $g(x) + r(x)$
  - Polynomdivision wird nicht erwartet
- Konstanter oder linearer Term $g(x)$
- Gebrochenrationaler Term (Rest) $r(x)$
- Günstig für Grenzwertbetrachtungen $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$
- Günstiger Ansatz für Funktionsbestimmungen, wenn
  - waagrechte oder schräge Asymptote bekannt
  - Polstelle(n) bekannt
- Beispiele
  - $f(x) = \dfrac{4(2x-1)}{4x-3} \Leftrightarrow 2 + \dfrac{2}{4x-3}$
    - $g(x) = 2$
    - $r(x) = \dfrac{2}{4x-3}$
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2 + \underbrace{\dfrac{2}{4x-3}}_{\to 0}\right) = 2$
  - $h(x) = \dfrac{-x^2+3x+2}{x-2} \Leftrightarrow -x + 1 + \dfrac{4}{x-2}$
    - $g(x) = -x + 1$
    - $r(x) = \dfrac{4}{x-2}$
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-x + 1 + \underbrace{\dfrac{4}{x-2}}_{\to 0}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-x+1) = \pm\infty$

Nullstelle(n)

- Nullstelle(n) des Zählerpolynoms $p(x)$
- Beispiel: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$
- Ausnahme: Nullstelle des Zählerpolynoms ist zugleich Nullstelle des Nennerpolynoms und daher kürzbar (vgl. hebbare Definitionslücke).
- Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

Definitionslücke(n)

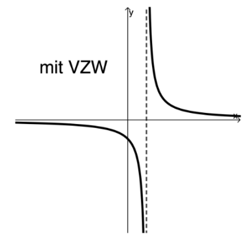
- Nullstelle(n) des Nennerpolynoms $q(x)$
- Maximaler Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \backslash \{\text{„Nennernullstellen"}\}$
- Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$
- **Hebbare Definitionslücke**
  - **Vollständig kürzbare** Nullstelle des Nennerpolynoms $q(x)$
  - Graph besitzt dort ein Definitionsloch
  - Hebbar durch Zusatzdefinition
  - Beispiel
    - $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$
    - hebbare Definitionslücke $x = 1$
    - Graph zeigt ein Definitionsloch an der Stelle $x = 1$
    - Grenzwertbetrachtung am gekürzten Term: $\lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$
    - Hebbar durch Zusatzdefinition: $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \{1\} \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$



Polstelle(n)

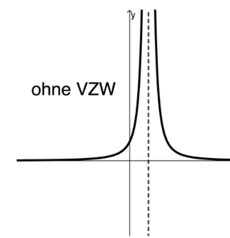
- **Nicht vollständig kürzbare** Nullstelle(n) des Nennerpolynoms $q(x)$
- **Beispiele**
  - $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow$ Polstelle $x = 1$
  - $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow$ Polstelle $x = 1$
  - Aber: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow$ hebbare Definitionslücke $x = 1$
- **Mit Vorzeichenwechsel (VZW)**
  - Einfache, dreifache, ... Nennernullstelle
  - Der Graph verläuft links- und rechtsseitig der Polstelle entgegengesetzt nach Unendlich
  - Beispiele
    - $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
    - $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

    Polstelle mit VZW $x = 1$



- **Ohne Vorzeichenwechsel**
  - doppelte, vierfache, ... Nennernullstelle
  - Der Graph verläuft links- und rechtsseitig der Polstelle gleichermaßen nach Unendlich
  - Beispiele
    - $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
    - $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^4}$

    Polstelle ohne VZW $x = 1$



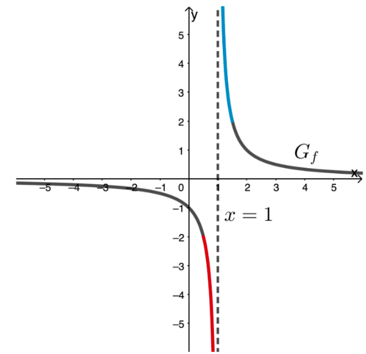
Asymptoten

- **Senkrechte Asymptote**
  - an einer Polstelle $x = x_0$
  - mit der Gleichung $x = x_0$
  - Untersuchung: Links- bzw. rechtsseitige Grenzwertbetrachtung für $x \to x_0$
  - Beispiel 5
- **Waagrechte / Schräge Asymptote**
  - Beschreibt das Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
  - Untersuchung / Nachweis
    - Vergleich von Zählergrad z des Zählerpolynoms und Nennergrad n des Nennerpolynoms
    - Grenzwertbetrachtung für $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
  - **Tipp**: Für eine aussagekräftige Grenzwertbetrachtung ist es hilfreich, die höchste Potenz des Nenners im Zähler **und** im Nenner auszuklammern (und zu kürzen).
  - **z < n** 3
  - **z = n** 3
  - **z > n** mit **z = n + 1** 3

Senkrechte Asymptote

- an einer Polstelle $x = x_0$
- mit der Gleichung $x = x_0$
- Untersuchung: Links- bzw. rechtsseitige Grenzwertbetrachtung für $x \to x_0$
- **Beispiel**
  - $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
  - Polstelle mit VZW $x = 1$
  - Senrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 1$
  - Linksseitige Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$
  - Rechtsseitige Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = +\infty$

  } mit VZW

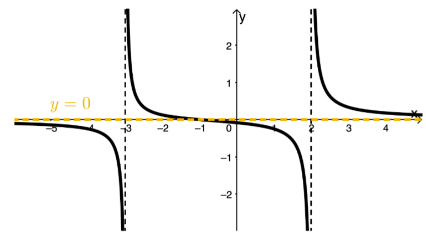


Waagrechte / Schräge Asymptote

- Beschreibt das Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
- Untersuchung / Nachweis
  - Vergleich von Zählergrad z des Zählerpolynoms und Nennergrad n des Nennerpolynoms
  - Grenzwertbetrachtung für $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
- **Tipp**: Für eine aussagekräftige Grenzwertbetrachtung ist es hilfreich, die höchste Potenz des Nenners im Zähler **und** im Nenner auszuklammern (und zu kürzen).
- **z < n**
  - Funktion **konvergiert** (Grenzwert existiert) gegen 0
  - Graph hat eine **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)
  - Beispiel 3
- **z = n**
  - Funktion **konvergiert** (Grenzwert existiert) gegen einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
  - **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = c}$ **mit** $c = \frac{a^m}{b^n}$ (Quotient der Leitkoeffizienten)
  - Beispiel 4
- **z > n** mit **z = n + 1**
  - Funktion **divergiert** (Grenzwert existiert nicht) nach $-\infty$ **bzw.** $+\infty$
  - **schräge Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = mx + t}$
  - Beispiel 3

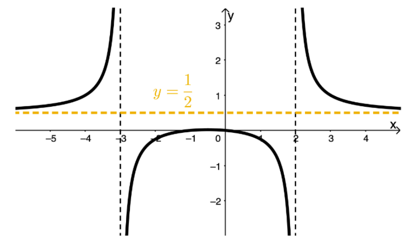
z < n

- Funktion **konvergiert** (Grenzwert existiert) gegen 0
- Graph hat eine **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y=0}$ (x-Achse)
- Beispiel
  - $f(x) = \dfrac{2x^{1}+2}{4x^{2}+4x-24} \Rightarrow \text{z} = 1 < 2 = \text{n}$
  - Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+2}{4x^2+4x-24} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{4}{x}-\frac{24}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\overset{\to 0}{\frac{2}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}}{4+\underset{\to 0}{\frac{4}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{24}{x^2}}} = \dfrac{0}{4} = 0$
  - Schlussfolgerung: Waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y=0$



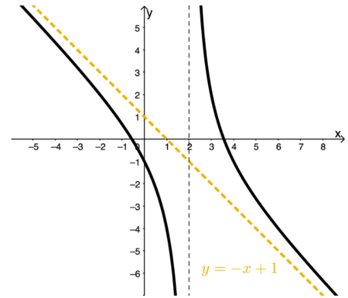
z = n

- Funktion **konvergiert** (Grenzwert existiert) gegen einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = c}$ mit $c = \frac{a^m}{b^n}$ (Quotient der Leitkoeffizienten)
- Beispiel
  - $f(x) = \frac{2x^2 + 2x}{4x^2 + 4x - 24} \Rightarrow$ z $= 2 = 2 =$ n
  - Quotient der Leitkoeffizienten: $f(x) = \frac{2x^2 + 2x}{4x^2 + 4x - 24} \Rightarrow c = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
  - Grenzwertbetrachtung
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 2x}{4x^2 + 4x - 24} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(4 + \frac{4}{x} - \frac{24}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \overset{\to 0}{\frac{2}{x}}}{4 + \underset{\to 0}{\frac{4}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{24}{x^2}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
    - $f(x) = \frac{2x^2 + 2x}{4x^2 + 4x - 24} \underset{\text{Hauptnenner}}{\overset{\text{Polynomdivision}}{\Longleftrightarrow}} \frac{1}{2} + \frac{12}{4x^2 + 4x - 24} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{12}{4x^2 + 4x - 24}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$
  - Schlussfolgerung: Waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}$



z > n mit **z = n + 1**

- Funktion **divergiert** (Grenzwert existiert nicht) nach $-\infty$ **bzw.** $+\infty$
- **schräge Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = mx + t}$
- Beispiel
  - $f(x) = \dfrac{-x^{2} + 3x + 2}{x^{1} - 2} \Rightarrow \text{z} = 2 > 1 = \text{n mit z} = 2 = 1 + 1 = \text{n} + 1$
  - Grenzwertbetrachtung: $f(x) = \dfrac{-x^{2} + 3x + 2}{x^{1} - 2} \underset{\text{Hauptnenner}}{\overset{\text{Polynomdivision}}{\Longleftrightarrow}} -x + 1 + \dfrac{4}{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-x + 1 + \underbrace{\dfrac{4}{x-2}}_{\to 0} \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-x + 1) = \pm\infty$
  - Schlussfolgerung: Schräge Asymptote mit der Gleichung $y = -x + 1$

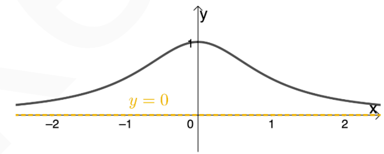


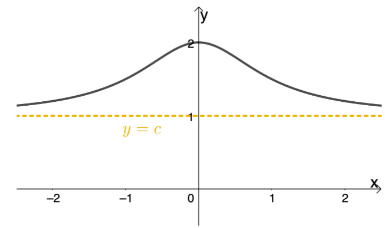
Funktionsbestimmungen

- $D = \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$
  - keine Nullstelle: $\dfrac{1}{x^2+1}$ 2
  - Nullstelle $x = x_1$: $\dfrac{x-x_1}{x^2+1}$ 2
- Polstelle $x = x_0$
  - mit VZW
    - keine Nullstelle: $\dfrac{1}{x-x_0}$ 2
    - Nullstelle $x = x_1 \ (x_1 \neq x_0)$: $\dfrac{x-x_1}{x-x_0}$ 2
  - ohne VZW
    - keine Nullstelle: $\dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ 2
    - Nullstelle $x = x_1 \ (x_1 \neq x_0)$: $\dfrac{x-x_1}{(x-x_0)^2}$ 2

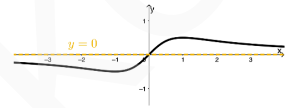
$D = \mathbb{R}$: $\frac{1}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$

- keine Nullstelle: $\frac{1}{x^2+1}$
  - waagrechte Asyptote
    - x-Achse $(y=0)$: $\frac{1}{x^2+1}$
      - symmetrisch bezüglich der y-Achse: $\frac{1}{x^2+1}$
      - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
    - $y = c$: $c + \frac{1}{x^2+1}$ $(c > 0)$
      - symmetrisch bezüglich der y-Achse: $c + \frac{1}{x^2+1}$
      - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
  - schräge Asymptote: ✗
- Nullstelle $x = x_1$: $\frac{x - x_1}{x^2+1}$ 2

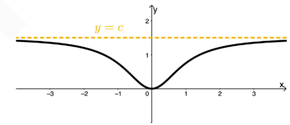




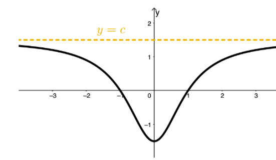
- $D = \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$
  - keine Nullstelle: $\dfrac{1}{x^2+1}$ ②
  - Nullstelle $x = x_1$: $\dfrac{x-x_1}{x^2+1}$
    - waagrechte Asymptote
      - x-Achse $(y=0)$: $\dfrac{x-x_1}{x^2+1}$
        - symmetrisch bezüglich der y-Achse: ✗
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn Nullstelle $x_1 = 0$: $\dfrac{x}{x^2+1}$



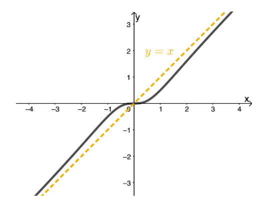
      - $y = c$, wenn z = n: $\dfrac{a(x-x_1)^2}{b(x^2+1)}$ mit $c = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \neq 0)$
        - symmetrisch bezüglich der y-Achse
          - $x_1 = 0$: $\dfrac{ax^2}{b(x^2+1)}$



          - zweite Nullstelle $x = -x_1$: $\dfrac{a(x-x_1)(x+x_1)}{b(x^2+1)} = \dfrac{a(x^2-x_1^2)}{b(x^2+1)}$



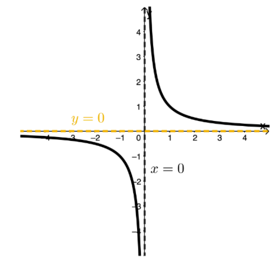
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
    - schräge Asymptote
      - Gleichung beliebig: $\dfrac{(x-x_1)^3}{x^2+1}$ (z = n + 1)
        - symmetrisch bzgl. der y-Achse: ✗
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn z.B. $x_1 = 0$: $\dfrac{x^3}{x^2+1}$



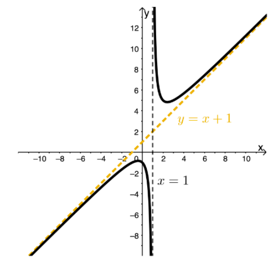
      - $y = mx + t$ vorgegeben

Vorgaben bedingen sich gegenseitig

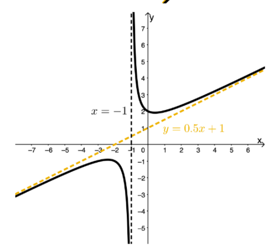
- Polstelle $x = x_0$
  - mit VZW
    - keine Nullstelle: $\frac{1}{x-x_0}$
      - waagrechte Asymptote
        - x-Achse $(y=0)$: $\frac{1}{x-x_0}$
          - symmetrisch bezüglich der y-Achse: ✗
          - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn Polstelle $x_0 = 0$: $\frac{1}{x}$



        - $y = c$: ✗
      - schräge Asymptote
        - Gleichung beliebig: $\frac{\overbrace{x^2+1}^{>0}}{x-x_0}$ (z = n+1) — keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems



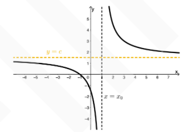
        - $y = mx + t$: $mx + t + \frac{1}{x-x_0}$ mit $mx + t + \frac{1}{x-x_0} \neq 0$ ➋



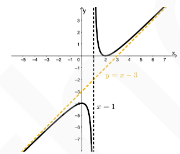
Vorgaben bedingen sich gegenseitig

    - Nullstelle $x = x_1$ $(x_1 \neq x_0)$: $\frac{x-x_1}{x-x_0}$ ②
  - ohne VZW ②

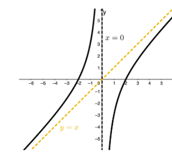
- Polstelle $x = x_0$
  - mit VZW
    - keine Nullstelle: $\dfrac{1}{x - x_0}$ ②
    - Nullstelle $x = x_1$ $(x_1 \neq x_0)$: $\dfrac{x - x_1}{x - x_0}$
      - waagrechte Asymptote
        - x-Achse $(y = 0)$: ✗
        - $y = c$: $\dfrac{a(x - x_1)}{b(x - x_0)}$ (z = n) mit $c = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \neq 0)$ — keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems



      - schräge Asymptote
        - Gleichung beliebig: $\dfrac{(x - x_1)^2}{x - x_0}$ (z=n+1)



          - symmetrisch bezüglich der y-Achse: ✗
          - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn zweite Nullstelle $x = -x_1$ und $x_0 = 0$: $\dfrac{(x - x_1)(x + x_1)}{x} = \dfrac{x^2 - x_1^2}{x}$

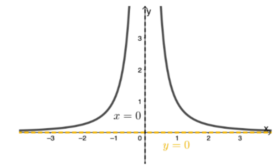


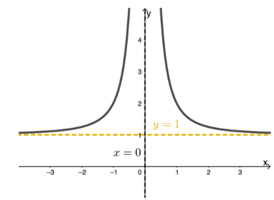
        - $y = mx + t$ vorgegeben

Vorgaben bedingen sich gegenseitig

  - ohne VZW ②

- Polstelle $x = x_0$
  - mit VZW ②
  - ohne VZW
    - keine Nullstelle: $\dfrac{1}{(x-x_0)^2}$
      - waagrechte Asymptote
        - x-Achse $(y=0)$: $\dfrac{1}{(x-x_0)^2}$
          - symmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn $x_0 = 0$: $\dfrac{1}{x^2}$
          - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
        - $y = c$: $c + \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ mit $c > 0$
          - symmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn $x_0 = 0$: $c + \dfrac{1}{x^2}$
          - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
      - schräge Asymptote: ✗
    - Nullstelle $x = x_1$ $(x_1 \neq x_0)$: $\dfrac{x-x_1}{(x-x_0)^2}$ ②





- Polstelle $x = x_0$
  - mit VZW ②
  - ohne VZW
    - keine Nullstelle: $\frac{1}{(x-x_0)^2}$ ②
    - Nullstelle $x = x_1$ $(x_1 \neq x_0)$: $\frac{x-x_1}{(x-x_0)^2}$
      - waagrechte Asymptote
        - x-Achse $(y = 0)$: $\frac{x-x_1}{(x-x_0)^2}$ (z < n) — keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems
        - $y = c$ $(c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ vorgegeben
      - schräge Asymptote
        - Gleichung beliebig: $\frac{(x-x_1)^3}{(x-x_0)^2}$ (z = n+1)
        - $y = mx + t$ vorgegeben

Vorgaben bedingen sich gegenseitig

Vorgaben bedingen sich gegenseitig